6-ЛЕКЦИЯ. n - ретті біртекті сызықты теңдеулер

Лекция мақсаты: Сызықты теңдеулердің қасиеттерімен таныстыру.
Негізгі сөздер: Сызықты оператор, Вронский анықтауышы, сызықты тәуелділік, тәуелсіздік, Лиувилль формуласы.

Қысқаша мазмұны

3.1. Жоғарғы ретті теңдеулердің ең қарапайымы және оңай зерттелетіні – сызықты теңдеулер.

Белгісіз функция мен оның туындыларын сызықты түрде байланыстыратын теңдеулерді сызықты теңдеулер деп татйды.

n - ретті сызықты теңдеудің жалпы түрі былай жазылады:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = q(x)$$

Мұндағы, $a_i(x)\ (i=0,...,n), q(x)$- функциялары кейбір $\langle a,b\rangle$ аралығында анықталған нақты үздіксіз функциялар.

Егер $a_0(x) \neq 0, \forall x \in \langle a,b\rangle$ болса, онда соған бөлу арқылы

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

теңдеуін аламыз. Соңғы түрдегі теңдеуді теңдеудің келтірілген, не қалыпты түрі деп атайды. Мұндағы, $f(x)$ функциясы бос мүше деп аталынады. Егер ол нөлге тең болмаса, (1) теңдеу біртексіз сызықты теңдеу деп, ал нөлге тең болса, біртекті сызықты теңдеу деп аталынады. (1) теңдеудің сәйкес біртектісі былай жазылады:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

Әдетте, (1) теңдеудің сол жағын қысқартып, былай белгілейді:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y \qquad (3)$$

Сонда (1) және (2) теңдеулерді былай жазуға болады:

$$L[y] = f(x)$$

және

$$L[y] = 0$$

Енгізілген (3) өрнекті сызықты дифференциалдық оператор деп атайды. Бұл оператор дифференциалдау амалының сызықтығынан шығатын төмендегідей екі шартты қанағаттандырады:

1^0. $L[Cy] = CL[y]$

2^0. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$

Бұлардың салдары ретінде тағы бір қатынасты жазуға болады:

3^0. $L\left[\sum_{i=1}^{m} C_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{m} C_i L[y_i]$

Бұл шарттар дифференциалдық оператордың сызықтығын білдіреді.

3.2. Сызықты теңдеулердің ортақ екі қасиетін келтірейік.

1^0. Тәуелсіз айнымалыны кейбір $\langle c,d\rangle$ аралығында анықталған n рет үздіксіз дифференциалданатын, бірінші туындысы нөлге тең емес функция арқылы жаңа тәуелсіз айнымалымен алмастырғаннан теңдеудің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, $x = \varphi(\tau), \varphi'(\tau) \neq 0, \forall \tau \in \langle c,d\rangle$ алмастыруын жасайық. Сонда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{\varphi'(\tau)}\frac{dy}{d\tau},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{d\tau}\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{\varphi'(\tau)}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\varphi'(\tau)}\frac{dy}{d\tau}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi'(\tau)}\left(\frac{1}{\varphi'(\tau)}\frac{d^2y}{d\tau^2} - \frac{\varphi''(\tau)}{\varphi'^2(\tau)}\frac{dy}{d\tau}\right)$$

Осылай кез келген $y^{(k)}$-ның сызықты түрде $\frac{dy}{d\tau}, \frac{d^2y}{d\tau^2}, ..., \frac{d^ky}{d\tau^k}$ арқылы өрнектелетінін көреміз. Осы қатынастарды (1) және (2) теңдеулерге апарып қойсақ, қайтадан сызықты теңдеулер аламыз.

2^0. Белгісіз функцияны басқа бір функциямен сызықты түрде алмастырғаннан теңдеудің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, айталық, $y = \alpha(x)z + \beta(x), \alpha(x) \neq 0$ түрінде алмастыру жасалсын. Мұндағы, $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ функциялары $\langle a,b \rangle$ аралығында анықталған n рет үздіксіз дифференциалданатын функциялар болсын.

Сонда

$$y' = \alpha(x)z' + \alpha'(x)z + \beta'(x),$$
$$y'' = \alpha(x)z'' + 2\alpha'(x)z' + \alpha''(x)z + \beta''(x),$$
$$..$$
$$y^{(n)} = \alpha(x)z^{(n)} + n\alpha'(x)z^{(n-1)} + ... + \alpha^{(n)}(x)z + \beta^{(n)}(x)$$

Осы туындыларды (1) теңдеуге апарып қойсақ, қайтадан біртексіз сызықты теңдеу аламыз.

Ал (2) теңдеуге апарып қойсақ, онда біртекті теңдеуіміз біртексіз сызықты теңдеуге айналады. Біртектілікті сақтау үшін $y = \alpha(x)z$ түріндегі біртекті алмастыру алу керек.

Сызықты теңдеулердің бір ерекшелігі – олардың бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімі бар болу үшін бір-ақ шарттың орындалуы жеткілікті.

Дәлірек айтсақ, мынандай тұжырым орын алады.

Теорема-1. Егер сызықты теңдеудің коэффициенттері мен бос мүшесі кейбір $\langle a,b \rangle$ аралығында анықталған үздіксіз функциялар болса, онда оның бастапқы шартты қанағаттандыратын жалғыз ғана шешімі болады және ол шешім $\langle a,b \rangle$ аралығының өн бойында анықталады.

Бұл тұжырымды дәлелдеу қиындық туғызбайды.

Біртекті сызықты теңдеулер

4.1. Біртекті сызықты теңдеудің шешімдерінің қасиеттерін келтірейік. Коэффициенттері кейбір $\langle a,b \rangle$ аралығында үздіксіз болып келетін мына n-ретті теңдеуді қарастырайық:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

Ең алдымен ескеретін жәй – біртекті сызықты теңдеудің барлық жағдайда нольдік шешімі бар. Ол шешім

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad (2)$$

бастапқы шартты қанағаттандыратын Коши есебінің шешімі: $y(x) = 0$. Бұл шешім жалғыз.

Теорема-1. Егер $\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ функциялары (1) теңдеудің $\langle a,b \rangle$ аралығындағы шешімдері болса, онда олардың сызықты комбинациясы

$$\varphi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + ... + \alpha_m\,\varphi_m(x) \qquad (3)$$

сол теңдеудің $\langle a,b \rangle$ аралығындағы шешімі болады.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша әрбір $\varphi_i(x)$ шешім:

$$L[\varphi_i(x)]=0\,(i=1,...,m),\forall x\in\langle a,b\rangle$$

Енді сызықты дифференциалдық оператордың қасиетін пайдалансақ, онда

$$L\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi_i(x)\right]=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i L[\varphi_i(x)]=0\ ,\forall x\in\langle a,b\rangle$$

Теорема-2. Егер (1) теңдеудің $\varphi(x)=u(x)+iv(x)$ түріндегі комплекс шешімі бар болса, онда оның нақты және жорамал бөліктері өз алдына сол теңдеудің шешімдерін береді.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша

$$L[\varphi(x)]=L[u(x)+iv(x)]=0\ ,\forall x\in\langle a,b\rangle$$

оператордың қасиеті бойынша

$$L[u(x)+iv(x)]=L[u(x)]+iL[v(x)]=0$$

Осыдан $L[u(x)]=0, L[v(x)]=0,\forall x\in\langle a,b\rangle$.

Анықтама-1. Егер $\langle a,b\rangle$ аралығында анықталған $\varphi_1(x),...,\varphi_m(x)$ функциялары үшін бәрі бірдей нөлге тең емес $\alpha_1,...,\alpha_m$ сандары табылып,

$$\alpha_1\varphi_1(x)+...+\alpha_m\,\varphi_m(x)=0,\forall x\in\langle a,b\rangle \tag{4}$$

теңдігі орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелді деп аталынады, ал (4) теңдік $\alpha_1,...,\alpha_m$ сандарының тек нөлдік мәндерінде ғана орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелсіз деп аталады.

4.2. Айталық, $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ функциялары (1) теңдеудің $\langle a,b\rangle$ аралығында анықталған нақты шешімдері болсын. Осы функциялар мен олардың туындыларынан құрылған төмендегідей n ретті анықтауыш

$$\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & ... & \varphi_n(x)\\ \varphi_1'(x) & ... & \varphi_n'(x)\\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots}\\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & ... & \varphi_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}=W[\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)] \tag{5}$$

Вронский анықтауышы деп аталады. Қысқаша, оны функциялардың вронскианы дейді. Бұл анықтауышты қысқаша, $W(x)$ деп белгілейді.

Теорема-3. Егер $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ шешімдері $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелді болса, онда олардың вронскианы осы аралықта нөлге тепе-тең.

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша бәрі бірдей нөлге тең емес $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандары үшін

$$\alpha_1\varphi_1(x)+...+\alpha_n\,\varphi_n(x)=0,\forall x\in\langle a,b\rangle \tag{6}$$

теңдігі орындалады.

Осы қатынасты $n-1$ рет дифференциалдау арқылы сызықты алгебралық жүйе құрайық:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\varphi_1(x)+...+\alpha_n\,\varphi_n(x)=0\\ \alpha_1\varphi_1'(x)+...+\alpha_n\,\varphi_n'(x)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_1\,\varphi_1^{(n-1)}(x)+...+\alpha_n\,\varphi_n^{(n-1)}(x)=0\end{array}\right\} \tag{7}$$

Бұл біртекті сызықты алгебралық жүйенің нөлдік емес шешімі бар болуы үшін оның анықтауышы нөлге тең болуы керек, ал ол анықтауыш Вронский анықтауышы, яғни $W(x)=0$.

Теорема-4. Егер $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ шешімдері $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелсіз болса, онда олардың вронскианы осы аралықтың бірде-бір нүктесінде нөлге айналмайды.

Дәлелдеуі. Кері жориық, кейбір $x_0 \in \langle a,b \rangle$ нүктесі үшін $W(x_0)=0$ болсын. (7) жүйені бір нүкте үшін қайта құрайық:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1\varphi_1(x_0)+...+\alpha_n\,\varphi_n(x_0)=0 \\ \alpha_1\varphi_1'(x_0)+...+\alpha_n\,\varphi_n'(x_0)=0 \\ .... \\ \alpha_1\,\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+...+\alpha_n\,\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{array}\right\}$$

Бұл жүйенің анықтауышы $W(x_0)=0$ болғандықтан, нөлге тең емес шешім бар:

$$\alpha_1=\alpha_1^{\,0},...,\alpha_n=\alpha_n^{\,0}$$

Осы сандар арқылы құрылған

$$\varphi(x)=\alpha_1^{\,0}\varphi_1(x)+...+\alpha_n^{\,0}\,\varphi_n(x)$$

функцияны қарастырайық. Бұл қосынды (1) теңдеудің шешімі болатыны 1-теоремада көрсетілген және ол (2) бастапқы шарттарды қанағаттандырып тұр. Сондықтан, шешімнің жалғыздығы бойынша $\varphi(x)=0$. Демек,

$$\alpha_1^{\,0}\varphi_1(x)+...+\alpha_n^{\,0}\,\varphi_n(x)=0$$

Мұндағы, $\alpha_1^{\,0},...,\alpha_n^{\,0}$ бәрі бірдей нөлге тең емес. Соңғы қатынас $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ функцияларының сызықты тәуелділігін көрсетеді. Ал бұл теореманың шартына қайшы. Сондықтан, $W(x)$ бірде-бір нүктеде нөлге тең болмайды. Бұл шарт әрі жеткілікті – егер берілген шешімдердің вронскианы нөлге тең болмаса, онда олар берілген аралықта сызықты тәуелсіз. Бұл тұжырымды да кері жору арқылы оңай дәлелдеуге болады.

4.3. Анықтама-2. Сызықты біртекті теңдеудің кез келген n сызықты тәуелсіз шешімдер жүйесі осы теңдеудің базисы немесе фундаменталь шешімдер жүйесі деп аталады.

Теорема-5. Біртекті сызықты теңдеудің берілген аралықта базисы әрқашанда бар болады және егер $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ базис болса, онда теңдеудің жалпы шешімі төмендегідей түрде жазылады:

$$\varphi(x)=C_1\varphi_1(x)+...+C_n\,\varphi_n(x) \tag{8}$$

Дәлелдеуі. Кез келген нөлге тең емес n ретті анықтауыш алып, кейбір $x_0 \in \langle a,b \rangle$ нүктесі үшін

$$\varphi_j(x_0)=a_{1j},\varphi_j'(x_0)=a_{2j},...,\varphi_j^{(n-1)}(x_0)=a_{nj},(j=1,...,n) \tag{9}$$

шартын қанағаттандыратын $\varphi_j(x),(j=1,...,n)$ шешімдерін құрсақ, онда олардың вронскианы $W(x_0)=W[\varphi_1(x_0),...,\varphi_n(x_0)]\neq 0$. Ал бұл шешімдердің $\langle a,b \rangle$ аралығында сызықты тәуелсіздігін көрсетеді. Мұндай анықтауыштарды шексіз көп ала беруге болады.

Енді (8) қатынастың жалпы шешім болатынын көрсетейік. Біріншіден, бұл қатынас шешімдердің сызықты комбинациясы болуы себепті, $C_1,...,C_n$ сандарының барлық мәндерінде шешім болады. Екіншіден, одан кез келген Коши есебінің шешімін алуға болады. Мынандай бастапқы шарт қоялық:

$$\varphi(x_0)=y_0,\varphi'(x_0)=y_0^{\,1},...,\varphi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{\,n-1} \tag{10}$$

Сонда тұрақты $C_1,...,C_n$ сандарын табу үшін сызықты алгебралық біртексіз жүйе аламыз:

$$\left.\begin{array}{l} C_1\varphi_1(x_0)+...+C_n\,\varphi_n(x_0)=y_0 \\ C_1\varphi_1'(x_0)+...+C_n\,\varphi_n'(x_0)=y_0^{\,1} \\ .... \\ C_1\,\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+...+C_n\,\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{\,n-1} \end{array}\right\} \tag{11}$$

Бұл жүйенің анықтауышы $W(x_0)$ және ол нөлге тең емес. Сондықтан, (11) жүйенің жалғыз ғана шешімі бар: $C_1^0,...,C_n^0$. Осы табылған мәндерді (8) қатынасқа қойсақ, (10) бастапқы шартты қанағаттандыратын жалғыз дербес шешім аламыз.

Әдетте, бастапқы анықтауыштың мүшелері ретінде Кронекер символын алуға болады:

$$a_{jk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Осыған сәйкес бастапқы шартты да мына түрде

$$\varphi_j^{(k)}(x_0) = \delta_{jk}, (j = 1,...,n; k = 1,...,n)$$

алсақ, онда $W(x_0) = 1$ болады. Бұл жағдайда фундаменталь шешімдер жүйесі x_0 нүктесінде нормаланған (қалыпталған) деп аталады.

Теорема-6. Берілген фундаменталь шешімдер жүйесі бойынша дифференциалдық теңдеу құруға болады және ол жалғыз болады.

Дәлелдеуі. Айталық, кейбір $\langle a,b \rangle$ аралығында $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ базисы берілсін. Онда іздеп отырған теңдеудің кез келген шешімі (8) түрде болатыны белгілі. Осы (8) шешімді пайдаланып $(n+1)$- ретті анықтауышты қарастырайық:

$$W[\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi] = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n & \varphi \\ \varphi_1' & \dots & \varphi_n' & \varphi' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n)} & \dots & \varphi_n^{(n)} & \varphi^{(n)} \end{vmatrix} \tag{12}$$

Бұл анықтауыш нөлге тең, өйткені соңғы бағананың мүшелері басқа бағаналарының мүшелерінің сызықты комбинациясы. Соңғы бағанадағы мүшелерді жалпы жағдайда y деп белгілеп, осы бағана бойынша жіктеп жазсақ, n ретті біртекті сызықты теңдеу аламыз. Мұнда ең жоғарғы ретті $y^{(n)}$ туындысының коэффициенті $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$-ға тең. Ал ол $\langle a,b \rangle$ аралығында нөлге тең емес. Сондықтан, жіктелудің мүшелерін осы $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ анықтауышына бөлсек, n ретті сызықты теңдеудің қалыпты түрін аламыз:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0$$

4.4. Жоғарыда келтірілген жіктеуден шығатын Лиувилль формуласын келтірейік.

Құрылған теңдеудің бірінші $p_1(x)$ коэффициенті былай анықталады:

$$p_1(x) = -\frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)} & \dots & \varphi_n^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n)} & \dots & \varphi_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W(x)} \tag{13}$$

Анықтауыштың туындысын табу ережесін еске алсақ, (13) қатынастың алымы бөлімінің туындысы болып шығады, яғни

$$p_1(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}$$

Осы қатынасты интегралдасақ,

$$\ln|W(x)| = -\int p_1(x)dx + \ln C$$

теңдігін аламыз. Осыдан

$$W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx}$$

немесе

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)dx} \qquad (14)$$

Осы қатынасты Лиувилль формуласы деп атайды.

Лиувилль формуласын пайдаланып бір шешімі белгілі екінші ретті біртекті сызықты теңдеудің жалпы шешімін құруға болады.

Егер $\ddot{x}+p_1(t)\dot{x}+p_2(t)x=0$ теңдеуінің $x_1=\varphi_1(t)$ шешімі белгілі болса, онда Лиувилль формуласы былай жазылады:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & x \\ \dot{\varphi}_1 & \dot{x} \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p_1(t)dt}$$

немесе

$$\varphi_1 \dot{x} - x\dot{\varphi}_1 = C_1 e^{-\int p_1(t)dt}$$

Соңғы теңдікті $\dfrac{1}{\varphi_1^2}$ функциясына көбейтіп интегралдасақ, онда

$$\left(\frac{x}{\varphi_1}\right)' = C_1 \frac{1}{\varphi_1^2} e^{-\int p_1(t)dt}$$

теңдігінен

$$\frac{x}{\varphi_1} = C_1 \int \frac{e^{-\int p_1(t)dt}}{\varphi_1^2} dt + C_2$$

теңдігін аламыз. Осыдан

$$x(t)=C_2\varphi_1(t)+C_1\varphi_1(t)\int \frac{e^{-\int p_1(t)dt}}{\varphi_1^2} dt \qquad (15)$$

Мұндағы, $\varphi_2(t)=\varphi_1(t)\int \dfrac{e^{-\int p_1(t)dt}}{\varphi_1^2} dt$ функциясы теңдеудің екінші дербес шешімін береді. Оған – теңдеуге қойып көз жеткізуге болады және бұл $\varphi_1(t)$ және $\varphi_2(t)$ шешімдер өзара тәуелсіз. Сондықтан, (15) қатынас жалпы шешім болады.